Adı Soyadı: **28.11.2023**

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) Aşağıda verilen integrallerin çeşidini (açıklamalar yaparak) belirleyiniz (15 puan).

a) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ **b)** $\int_0^{+\infty} \ln x\,dx$ **c)** $\int_0^{\pi} \sec x\,dx$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \ \sin n^2}{\ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz (15 puan).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^n}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz (15 puan).

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ serisi mutlak yakınsak mıdır? Koşullu yakınsak mıdır? Araştırınız (15puan).

5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun. O halde $L<1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz (10 puan).

6) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) e^{\frac{x}{n}}\,dx$ değerini bulunuz (15 puan).

7) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^{\frac{3}{2}}}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz (15 puan).

Not: 1. sorudaki her şık 5 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

CEVAP ANAHTARI

1) a) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ integralinde $f(x)=e^{-x}$ fonksiyonu $[0,1]$ de sürekli olduğundan verilen integral has integraldir.

b) $\int_0^{+\infty} \ln x\,dx$ integralinde integrasyon aralığı sınırsızdır. Ayrıca $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğundan 3. çeşit has olmayan integraldir.

c) $\int_0^{\pi} \sec x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x}\,dx$ integralinde $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$ ve $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$ olduğundan integral 2. çeşit has olmayan integraldir.

2) Herhangi terimli serisi için Dirichlet testini kullanalım. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n=\frac{1}{\ln n}$, $b_n=\sin n\cdot\sin n^2$ olsun. Böylece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$ olur. Yine $\forall n\geq 2$ için $\ln n$ artan olduğundan $a_n=\frac{1}{\ln n}$ azalan olur. Ayrıca $\forall n\geq 2$ için

$$\sin n^2\cdot\sin n = \frac{1}{2}\left[\cos(n^2-n)-\cos(n^2+n)\right]$$

olup $\forall N\geq 2$ için

$$\left|\sum_{k=2}^{N} b_k\right| = \left|\sum_{k=2}^{N} \sin k^2 \sin k\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=2}^{N}\left[\cos(k(k-1))-\cos(k(k+1))\right]\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\cos(2.1)-\cancel{\cos(2.3)}\right)+\left(\cancel{\cos(3.2)}-\cancel{\cos(3.4)}\right)\cancel{+\cdots+}\left(\cancel{\cos((N-1).(N-2))}-\cancel{\cos((N-1).N)}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\cancel{\cos(N(N-1))}-\cos N(N+1)\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\cos 2-\cos(N(N+1))\right|\leq\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

bulunur. Bu takdirde Dirichlet testi gereği $\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n \sin n^2}{\ln n}$ serisi yakınsaktır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^n}{n}$ serisinin genel terimi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{e^n}{n}$ biçimindedir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \begin{cases} \frac{e^n}{n}, & n \text{ tek ise} \\ -\frac{e^n}{n} & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçimindedir. Ayrıca $\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n} \to \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Eğer

$\forall x \in [1, \infty)$ için $f(x) = \frac{e^x}{x}$ denirse $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$ (L'Hospital)

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

olup $\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ bulunur. O halde genel terim testinden

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n}$ serisi ıraksaktır.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot \sin(\frac{1}{n})| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\frac{1}{n})|$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{n} \leq 1$

olduğundan $\sin \frac{1}{n} > 0$ olur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot \sin \tfrac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \tfrac{1}{n}$$

dır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \sin \frac{1}{n}$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alınırsa

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

olup $u = \frac{1}{n}$ denirse $n \to \infty$ iken $u \to 0$ olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 = L$$

bulunur. O halde limit karşılaştırma testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ ıraksaktır. Bu taktirde

verilen seri mutlak yakınsak değildir.

4. cevabın devamı) Seri yakınsak mıdır? Leibniz testini kullanalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \sin \frac{1}{n}$ olup $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ olur. Yine

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$ olduğundan sinüs fonksiyonu 1. bölgede artan bir fonksiyondur.

Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olup $\sin \frac{1}{n+1} < \sin \frac{1}{n} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$

dir. Yani (a_n) azalandır. O halde, Leibniz testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

serisi yakınsaktır. Bu takdirde verilen seri koşullu yakınsak olur.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \ldots (1)$$

ve $L < 1$ olsun. $L < q < 1$ olacak şekilde bir q sayısını alalım.

Böylece $q - L > 0$ olur. O halde (1) yakınsaması gereği $\varepsilon = q - L > 0$

için $\forall n \geq n_0$ iken

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - L \right| < q - L \Longleftrightarrow -q + 2L < \sqrt[n]{a_n} < q$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Yani $\forall n \geq n_0$ iken

$$a_n < q^n$$

olur. Eğer $\forall n \geq n_0$ için $b_n = q^n$ denirse $q < 1$ olduğundan $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$

serisi (geometrik seri) yakınsak olur. Böylece karşılaştırma testinden

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

6) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = (x^2+1) e^{\frac{x}{n}}$ fonksiyonlarının

(f_n) dizisini alalım. O halde $\forall x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} (x^2+1) e^{\frac{x}{n}} = x^2+1$$

olup (f_n) noktasal olarak $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ fonksiyonuna

yakınsaktır. $f_n \rightrightarrows f$ midir?

6. cevabın devamı) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{|(x^2+1)e^{\frac{x}{n}} - (x^2+1)| : x \in [0,1]\}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = |(x^2+1)(e^{\frac{x}{n}}-1)| \leq 2\,|e^{\frac{x}{n}}-1| = 2\,(e^{\frac{x}{n}}-1) \leq 2\,(e^{\frac{1}{n}}-1)$$

olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq a_n \leq 2(e^{\frac{1}{n}}-1) \quad \ldots (1)$$

olur. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = 2(e^{\frac{1}{n}}-1)$ denirse $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2(e^{\frac{1}{n}}-1) = 0$

olup (1) ve sıkıştırma teoremi gereği $a_n \to 0$ elde edilir. Yani $f_n \rightrightarrows f$ dir.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $[0,1]$ de süreklidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

bulunur.

7) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^{\frac{3}{2}}}$ olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^{3/2}}$ fonksiyon serisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \frac{\cos x}{n^{3/2}}$ denirse f_n fonksiyonları $\mathbb{R}$ de süreklidir. Yine $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos x}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} = M_n$$

olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ bir p-serisidir ve $p = \frac{3}{2} > 1$ olduğundan yakınsaktır. Böylece Weierstrass M-Kriteri gereği $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^{3/2}}$ serisi düzgün yakınsaktır. Bu takdirde bu serinin düzgün yakınsak olduğu f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de süreklidir.